CNC-Maroc 2007—Epreuve de math I : Corrigé
Par M.Taibi professeur en MP* à Rabat

Partie I

(1) L'application $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ pour tout réel x .

(a) On a : $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$, donc $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,1[$ si, et seulement $1-x<1$ soit $x>0$.

(b) On a aussi $t^{x-1}e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{O}(\frac{1}{t^2})$, donc $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

(2) L'applicationn $t \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{-t}e^{(z-1)\ln(t)}$ est continue sur $]0, +\infty[$, et que pour tout $t>0$, $\left|e^{-t}t^{z-1}\right| = e^{-t}t^{\Re(z)-1}$, donc par la question 1°), l'application $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $\Re(z) > 0$.

(3) Quelques formules utiles :

(a) Les applications $t \mapsto t^z$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont de classes C^1 sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $z \in C$ tel que $\Re(z) > 0$, on a : $\left|e^{-t}t^z\right| = e^{-t}t^{\Re(z)-1} \underset{t\mapsto+\infty}{\to} 0$. On applique alors une intégration par parties à l'intégrale $\Gamma(z+1) = \int\limits_0^{+\infty} t^z e^{-z-1}dt$:

$\Gamma(z+1) = \int\limits_0^{+\infty} t^z e^{-z-1}dt = \left[-e^{-t}t^z\right]_{t=0}^{+\infty} + z\int\limits_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt = z\Gamma(z)$ pour tout z tel que $\Re(z) > 0$

(b) Pour tout $z \in C$ tel que $\Re(z) > 0$ et tout $p \in N^*$, on a :
$\Gamma(z+p) = \Gamma((z+p-1)+1) = (z-p-1)\Gamma(z-p-1)$.
D'où : $\prod\limits_{k=1}^{p} \Gamma(z+k) = \prod\limits_{k=1}^{p} (z-k-1)\Gamma(z-k-1) = \prod\limits_{k=1}^{p-1} (z-k) \prod\limits_{k=1}^{p-1} \Gamma(z-k)$ et par suite :

$$\Gamma(z+p) = \prod_{k=1}^{p-1}(z-k)\Gamma(z)$$

On prend $z = \alpha+1$, on a : $\Re(z) = \Re(\alpha+1) = \Re(\alpha)+1 > 0$ et par suite

$$\Gamma(\alpha+1+p) = \gamma(\alpha+1)\prod_{k=1}^{p-1}(\alpha+1+k) = \Gamma(\alpha+1)(\alpha+1)...(\alpha+p)$$

(c) Pour tout $x>0$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et strictement positive, donc $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt > 0$.

(d) Par un simple calcul, on a $\Gamma(1) = 1$ et par $b)$ pour $\alpha = 0$, $p = n$, on a ::

$$\Gamma(n+1) = \prod_{k=1}^{n} k = n!$$

(4) Développement en série de Γ.

(a) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$, on a : $\Gamma(z) = \int_{]0,1[} t^{z-1}e^{-t}dt + \int_{[1,+\infty[} t^{x-1}e^{-t}dt$
Ecrivons $e^{-t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}t^n$, on a alors : $t^{z-1}e^{-t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}t^{z+n-1}$
Si l'on pose $f_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{n!}t^{z+n-1}$ pour $t \in]0,1]$, on a : f_n est intégrable sur $]0,1]$ pour tout entier naturel n et que $\int_{]0,1]} |f_n(t)|\, dt \leqslant \int_{]0,1]} \frac{1}{n!}dt = \frac{1}{n!}$ et puisque la série $\sum \dfrac{1}{n!}$ converge, il en résulte par le théorème d'intégration terme à terme que

$$\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{z+n-1}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$$

(b) Posons $f_n(z) = \dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{1}{z+n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$ (fraction rationnelle en z)
pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|f_n(z)| = \dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{|n+z|} \leqslant \dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{|n+\Re(z)|}$ car $|n+\Re(z)| \leqslant |n+z|$, donc $\sum f_n(z)$ converge absolument et par suite $\sum f_n$
converge simplement sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$.
Soit K un compact inclu dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$, et $\alpha = d(Z^-, K)$, on a $\alpha > 0$ car $\mathbb{Z}^-$ fermé et K compact. On a alors

pour tout $z \in K$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $|n+z| = d(-n,z) \geqslant \alpha$, donc $|f_n(z)| \leqslant \dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{|n+z|} \leqslant \dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{\alpha}$. Comme la série $\sum \dfrac{1}{n!}$ converge, il en résulte que $\sum f_n$ converge localement uniformément sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$, donc par le théorème de continuité la fonction somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$.

On peut aussi montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue en tout point z_0 de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$ en effet : Comme $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$ est un ouvert, on a pour tout $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$, il existe $r > 0$ tel $B(z_0,r) \subset \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$, on prend alors le compact $K = \overline{B}(z_0,\alpha)$ et on termine comme avant .

(5) Soit $0 < a < b$ et $t > 0$, on a : $t^{a-1} = e^{(a-1)\ln(t)}$.

(a) Si $t \in]0,1]$, , alors $\ln(t) \leqslant 0$, donc $(a-1)\ln(t) \geqslant (b-1)\ln(t)$ et comme $x \mapsto e^x$ est croissante, on déduit que $t^{a-1} \geqslant t^{b-1}$. Soit $\max(t^{a-1},t^{b-1}) = t^{a-1}$.
Si $t > 1$, alors $\ln(t) > 0$, donc $t^{a-1} < t^{b-1} et$ par suite $\max(t^{a-1},t^{b-1}) = t^{b-1}$.
Conclusion finale : Pour tous $0 < a < b$ et $t > 0$, on a :

$$\max(t^{a-1},t^{b-1}) \leqslant t^{a-1} + t^{b-1}.$$

(b) Pour $t \in]0,1]$, on a d'après a) $0 < t^{x-1} \leqslant \max(t^{x-1},t^{a-1}) = t^{a-1} = \max(t^{a-1},t^{b-1})$
de même si $t > 1$, on a : $0 < t^{x-1} \leqslant \max(t^{x-1},t^{b-1}) = t^{b-1} = \max(t^{a-1},t^{b-1})$
En conclusion : $0 < t^{x-1} \leqslant \max(t^{a-1},t^{b-1})$ pour tout $t \in]0,+\infty[$

(c) La fonction $f : (x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$. est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

L'application $x \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{-t}e^{(x-1)\ln(t)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\frac{d}{dx}f(x,t) = \ln(t)f(x,t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
De plus pour tout compact $K = [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et tout $(x,t) \in K \times \mathbb{R}_+^*$, on a : $\left|\frac{d}{dx}f(x,t)\right| \leqslant |\ln(t)|\, e^{-t}t^{x-1} \leqslant |\ln(t)|\, e^{-t}\max(t^{a-1},t^{b-1}) \leqslant |\ln(t)|\, e^{-t}(t^{a-1}+t^{b-1})$ et que la fonction $\varphi : t \mapsto |\ln(t)|\, e^{-t}(t^{a-1}+t^{b-1})$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\sqrt{t}\varphi(t) = \sqrt{t}(t^{a-1}+t^{b-1})e^{-t}\,|\ln(t)| \underset{t\to 0^+}{\to} 0$. Pour $t \geqslant 1$, $\varphi(t) \leqslant (t^{a-1}+t^{b-1})te^{-t} = (t^a+t^b)e^{-t}$
.
Donc par le théorème de dérivation sous le signe intégral, il en résulte que Γ est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx}f(x,t)dt = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt.$$

(d) On a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$, et comme Γ est continue en 1, on a $\lim_{x\to 0^+}\Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$, donc

$$\Gamma(x) \sim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$$

Partie II :

$\lambda > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \qquad y_\alpha(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{n+\alpha}$

(1) $a_0 \neq 0$ et y_α est solution sur $]0,R[$ de l'équation (F_λ) .

L'application $x \mapsto x^\alpha$ est de classe C^∞ sur R_+^* et que $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]0,R[$ (somme d'une série entière), donc y_α est de classe C^∞ sur $]0,R[$ (produit de fonctions de classes C^∞).
Par calculs : $y'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^\alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)a_n x^{\alpha+n-1}$

$y''_\alpha(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha+n)(\alpha+n-1)a_n x^{\alpha+n-2}$

Donc

$$\begin{aligned} y_\alpha \text{ est solution sur }]0,R[\text{ de } (F_\lambda) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in]0,R[, \quad -(x^2+\lambda)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha+n} \\ &\qquad + \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)a_n x^{\alpha+n} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha+n)(\alpha+n-1)a_n x^{\alpha+n} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in]0,R[\\ &\qquad \sum_{n=0}^{\infty}((n+\alpha)^2-\lambda^2)a_n x^{\alpha+n} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{\alpha+n} = 0 \qquad : \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in]0,R[\\ &\qquad \sum_{n=0}^{\infty}((n+\alpha)^2-\lambda^2)a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n = 0 \text{ car } x^\alpha \neq 0 \end{aligned}$$

On fait tendre x vers $0^{+,}$ obtenir $\alpha^2 - \lambda^2 = 0$ car $a_0 \neq 0$ et puis $((\alpha+1)^2 - \lambda^2)a_1 = 0$ et une recurrence $((\alpha+n)^2 - \lambda$ $^2)a_n = a_{n-2}$..

(2) $\alpha = \lambda$, $a_0 \neq 0$ et y_λ est solution sur $]0,R[$ de (F_λ) .

(a) On a : $y_\lambda(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{\lambda+n}=x^\lambda\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. On sait que (1) $\quad((\lambda+n)^2-\lambda^2)a_n=a_{n-2}$ pour tout $n\geqslant 2$
Puisque . $(\lambda+1)^2-\lambda^2\neq 0$, on a $a_1=0$ et par la relation (1), on a : $a_{2p+1}=0$ pour tout $p\in\mathbb{N}$ .et $a_{2p}=\dfrac{1}{(\lambda+2p)^2-\lambda^2}a_{2(p-1)}$ pour tout $p\in\mathbb{N}^*$. Donc $\prod\limits_{k=1}^{p}a_{2k}=\prod\limits_{k=1}^{p}\dfrac{1}{(\lambda+2k)^2-\lambda^2}\prod\limits_{k=1}^{p}a_{2(k-1)}=\prod\limits_{k=1}^{p}\dfrac{1}{(\lambda+2k)^2-\lambda^2}\prod\limits_{k=0}^{p-1}a_{2k}$ soit : $a_{2p}=\prod\limits_{k=1}^{p}\dfrac{1}{(\lambda+2k)^2-\lambda^2}a_0$.
Mais $(\lambda+2k)^2-\lambda^2=4\lambda k+4k^2=4k(\lambda+k)$, d'où $\prod\limits_{k=1}^{p}\dfrac{1}{(\lambda+2k)^2-\lambda^2}=\prod\limits_{k=1}^{p}\dfrac{1}{4k(\lambda+k)}=\dfrac{1}{4^pp!}\prod\limits_{k=1}^{p}\dfrac{1}{\lambda+k}=\dfrac{1}{2^{2p}p!}\dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}$.
En conclusion :

$$\forall p\in\mathbb{N},\quad a_{2p}=\frac{a_0}{2^{2p}p!}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}$$

(b) Pour $x>0$, on a : $\left|\dfrac{a_{2p}x^{2p}}{a_{2(p-1)}x^{2(p-1)}}\right|=\dfrac{a_{2p}}{a_{2(p-1)}}x^2=\dfrac{1}{(\lambda+2p)^2+\lambda^2}x^2\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}0$, donc le rayon de convergence R est infini .

(c) On suppose $a_0 2^\lambda\Gamma(\lambda+1)=1$.
On a : $\forall x>0,\quad y_\lambda(x)$

$$\begin{aligned} y_\lambda(x) &= \sum_{p=0}^{+\infty}a_{2p}x^{2p+\lambda}\\ &= \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{a_0}{2^{2p}p!}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}x^{2p+\lambda}\\ &= \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{a_0}{p!}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}(\frac{x}{2})^{2p+\lambda}2^\lambda\\ &= \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!}\frac{1}{\Gamma(\lambda+p+1)}(\frac{x}{2})^{2p+\lambda}\ \text{car } a_0 2^\lambda\Gamma(\lambda+1)=1. \end{aligned}$$

Equivalent au voisinage de 0 :
D'après les propriétés des séries entières, on a :

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\frac{1}{\Gamma(\lambda+p+1)}(\frac{x}{2})^{2p}\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}$$

Donc

$$y_\lambda(x)\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}(\frac{x}{2})^\lambda$$

(3) On suppose ici que $2\lambda\notin\mathbb{N}$.

(a) D'après la question 1 et 2) la fonction $y_{-\lambda}$ est aussi solution sur R_+^* de (F_λ) .

(b) Montrons $(y_\lambda,y_{-\lambda})$ est un système fondamental de solutions sur R_+^* de (F_λ) .
Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha y_\lambda+\beta y_{-\lambda}=0$.
Comme $y_\lambda(x)\underset{x\to0^+}{\sim}\dfrac{1}{\Gamma(\lambda+1)}(\dfrac{x}{2})^\lambda$ et $y_{-\lambda}(x)\underset{x\to0^+}{\sim}\dfrac{1}{\Gamma(-\lambda+1)}(\dfrac{x}{2})^{-\lambda}$, on a : $y_\lambda(x)\underset{x\to0^+}{\rightarrow}0$ et $y_{-\lambda}(x)\underset{x\to0^+}{\rightarrow}+\infty$, donc si l'on suppose $\alpha\neq0$, alors en faisant tendre x vers 0, on aboutit à une contradiction.
On conclut que $\alpha=0$ et puis $\beta=0$, donc les solutions y_λ et $y_{-\lambda}$ sont linéairement indépendantes .
(F_λ) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients continus et sans second membre, son ensemble de solutions est donc un espace vectoriel réel de dimension deux. En conséquence : ($y_\lambda,y_{-\lambda}$) est un système fondamental de solutions de (F_λ) et que toute solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_λ) est de la forme :

$$y=\alpha y_\lambda+\beta y_{-\lambda}\quad \text{où}\quad \alpha,\beta\in R$$

Partie III.

A- Etude de (F_0) :
Pour $x>0$, on a : $y_\lambda(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2^pp!)^2}x^{2p}$.

(1) .

(a) Pour tout entier $k\geq1$: $\prod\limits_{k=1}^{p}a_{2k}(\alpha)=\prod\limits_{k1}^{p}\dfrac{1}{(\alpha+2k)^2}\prod\limits_{k=1}^{p}a_{2(k-1)}$, donc $a_{2p}(\alpha)=\prod\limits_{k=1}^{p}\dfrac{1}{(\alpha+2k)^2}a_0(\alpha)$.
Or $a_0(\alpha)=1$, d'où la formule cherchée :

$$a_{2p}(\alpha)=\prod_{k=1}^{p}\frac{1}{(\alpha+2k)^2}\ \text{pour tout } p\geq1.$$

(b) D'après les notations de l'enoncé, pour tout $p \in N^*$, on a : $a_{2p}(\alpha) = \exp(\sum_{k=1}^{p} \ln(\frac{1}{(\alpha+2k)^2})) = \exp(-2\sum_{k=1}^{p} \ln(\alpha+2k))$, donc : $a'_{2p}(\alpha) = -\sum_{k=1}^{p} \frac{2}{\alpha+2k} a_{2p}(\alpha)$ et puis

$$\begin{aligned} a'_{2p}(0) &= -2\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k} a_{2p}(0) \\ &= -\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} a_{2p}(0) \\ &= -H_p.a_{2p}(0) \end{aligned}$$

Or $a_{2p}(0) = \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{2^{2p}(p!)^2} = \left(\frac{1}{2^p p!}\right)^2$, donc :

$$b_p = a'_{2p}(0) = -\left(\frac{1}{2^p p!}\right)^2 H_p$$

(c) Calcul du rayon de convergence R_b :

On a $b_p \underset{p\to\infty}{\sim} -\frac{1}{(2^p p!)^2} \ln(p) = o(\frac{1}{2^p p!})$ car $H_p \sim \ln(p)$, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum b_p x^p$ est infini :

$$R_b = +\infty$$

(2) .

(a) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} (2p)^2 b_p + 4pa_{2p}(0) &= -(2p)^2 a_{2p}(0) + 4pa_p(0) \\ &= a_{2p}(0)\left(-(2p)^2 H_P + 4p\right) \end{aligned}.$$

Mais $(2p)^2 a_{2p}(0) = a_{2(p-1)}(0)$, donc :

$$\begin{aligned} (2p)^2 b_p + 4pa_{2p}(0) &= -a_{2p}(0)H_p + 4pa_{2p}(0) \\ &= -a_{2(p-1)}(0)H_{p-1} \underbrace{- \frac{1}{p} a_{2(p-1)}(0) + 4pa_{2p}(0)}_{=0} \\ &= b_{p-1} \end{aligned}$$

D'où le résultat demandé .

(b) L'application $x \mapsto y_0(x)\ln(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ (Opérations), donc z_0 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x > 0$, on a :

$z_0(x) = y_0(x)\ln(x) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p}$

$z'_0(x) = \frac{1}{x} y_0(x) + \ln(x).y'_0(x) + 2\sum_{p=1}^{\infty} p b_p x^{2p-1}$

$z''_0(x) = -\frac{1}{x^2} y_0(x) + \frac{2}{x} y'_0(x) + \ln(x).y''_0(x) + 2\sum_{p=1}^{\infty} p(2p-1) b_p x^{2p-2}$

Donc

$$\begin{aligned} x^2 z''_0(x) + xz'_0(x) - (x^2+0)z_0(x) &= -y_0(x) + 2xy'_0(x) + \ln(x).x^2 y''_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} 2p(2p-1) b_p x^{2p} \\ &\quad + y_0(x) + \ln(x).xy'_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p 2p x^{2p} \\ &\quad - x^2 \ln(x) y_0(x) - \sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p+2} \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que y_0 est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_0) et de la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned} x^2 z''_0(x) + xz'_0(x) - (x^2+0)z_0(x) &= 2xy'_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p (2p)^2 x^{2p} - \sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p+2} \\ &= \underbrace{\sum_{p=1}^{\infty} 4pa_{2p}(0)x^{2p} + \sum_{p=1}^{\infty} b_p (2p)^2 x^{2p}}_{\sum_{p=1}^{\infty} b_{p-1} x^{2p}} - \sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p+2} \\ &\qquad \text{car } xy'_0(x) = \sum_{p=1}^{\infty} 2p\ a_{2p}(0) x^{2p} \\ &= b_0 x^2 = 0 \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure .

(3) Comme $y_0(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(0+1)}(\frac{x}{2})^0 = 1$, $\lim_{x\to0} \sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p} = 0$ et $\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$, on a :
$z_0(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \ln(x)$.
ceci permet de prouver (comme à la question II 3.b) que les solutions y_0 et z_0 sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_0) sont linéairement indépendantes .et avec les mêmes raisons que dans $III.3b)$, toute solution de (F_0) est de la forme :
$y = \alpha y_0 + \beta z_0$ où α, β sont des constantes réelles arbitraires .

B- Etude de (F_1) :

(1) .

(a) Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, on a : $c_{2p}(\alpha)=\dfrac{1}{(\alpha+2p)^2-1}c_{2(p-1)}$, donc $\prod\limits_{k=1}^{p}c_{2k}(\alpha)=\prod\limits_{k=}^{p}\dfrac{1}{(\alpha+2k)^2-1}\prod\limits_{k=1}^{p}c_{2(k-1)}$ et par suite $c_{2p}(\alpha)=\prod\limits_{k=}^{p}\dfrac{1}{(\alpha+2k)^2-1}c_0(\alpha)$.
et comme $c_0(\alpha)=1$, on déduite que :

$$c_{2p}(\alpha)=\prod_{k=}^{p}\frac{1}{(\alpha+2k)^2-1}$$

(b) Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $d_p=\dfrac{d}{d\alpha}c_{2p}(1)$. Comme $c_{2p}(\alpha)=\exp(-\sum\limits_{k=1}^{p}\ln((\alpha+2k)^2-1)$, on a : $c_{2p}'(\alpha)=-\sum\limits_{k=1}^{p}\dfrac{2(\alpha+2k)}{(\alpha+2k)^2-1}c_{2p}(\alpha)$. D'où
$d_p=-\sum\limits_{k=1}^{p}\dfrac{2(1+2k)}{(1+2k)^2-1}\prod\limits_{k=}^{p}\dfrac{1}{(\alpha+2k)^2-1}=-\sum\limits_{k=1}^{p}\dfrac{2(1+2k)}{4k(1+k)}\prod\limits_{k=}^{p}\dfrac{1}{(1+2k)^2-1}$.
Or $\prod\limits_{k=}^{p}\dfrac{1}{(1+2k)^2-1}=\prod\limits_{k=}^{p}\dfrac{1}{4k(1+k)}=\dfrac{1}{2^{2p}}\prod\limits_{k=}^{p}\dfrac{1}{k(1+k)}=\dfrac{1}{2^{2p}}\dfrac{1}{p!}\dfrac{1}{(p+1)!}$, et
$\dfrac{2(1+2k)}{4k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1})=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1})$
donc $\sum\limits_{k=1}^{p}\dfrac{2(1+2k)}{4k(k+1)}=\frac{1}{2}(H_p+H_{p+1}-1)$. D'où le résultat demandé :

$$d_p=\frac{1}{2^{2p+1}p!(p+1)}(H_p+H_{p+1}-1)$$

(c) On a :
$d_p=\dfrac{1}{2^{2p+1}p!(p+1)}(H_p+H_{p+1}-1)=\dfrac{1}{2^{2p+1}p!(p+1)!}(2H_p+\dfrac{1}{p+1}-1)\underset{p\to\infty}{\sim}\dfrac{1}{2^{2p}}\dfrac{1}{p!(p+1)!}\ln(p)$, donc le rayon de convergence demandé :

$$R_d=+\infty$$

(2) .

(a) On a : Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $\left((1+2p)^2-1\right)d_p+2(1+2p)c_{2p}(1)=d_{p-1}$. En effet :
par dérivation de l'identité $c_{2p}(\alpha)\left((1+2p)^2-1\right)=c_{2(p-1)}(\alpha)$, on a : $c_{2p}'(\alpha)\left((\alpha+2p)^2-1\right)+2(\alpha+2p)c_{2p}(\alpha)=c_{2(p-1)}'(\alpha)$
Pour $\alpha=1$, on a :

$$d_p((1+2p)^2-1)+2(1+2p)c_{2p}(1)=d_{p-1}$$

(b) Il est clair que les fonctions y_1 et $x\mapsto\sum\limits_{p=1}^{\infty}d_px^{2p+1}$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et par dérivation on obtient pout tout $x>0$:

$$\begin{aligned}
x^2u_1''(x)+xu_1'(x)-(1+x^2)u_1(x) &= x^2\left(2y_1'(x)\ln(x)+\frac{4}{x}y_1'(x)-\frac{2}{x^2}y_1(x)+\sum_{p=1}^{\infty}2p(2p+1)d_px^{2p-1}\right)\\
&\quad +x\left(2y_1'(x)\ln(x)+\frac{2}{x}y_1(x)+\sum_{p=1}^{\infty}(2p+1)d_px^{2p}\right)\\
&\quad -(1+x^2)\left(2y_1(x)\ln(x)+\sum_{p=0}^{\infty}d_px^{2p+1}\right)\\
&= 2\ln(x)\left(x^2y_1''(x)+xy_1'(x)-(1+x^2)y_1(x)\right)+4xy_1'(x)\\
&\quad +\sum_{p=0}^{\infty}(2p+1)^2d_px^{2p+1}-(1+x^2)\sum_{p=0}^{\infty}d_px^{2p+1}
\end{aligned}$$

Comme y_1 est xsolution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1), on a : $x^2y_1''(x)+xy_1'(x)-(1+x^2)y_1(x)=0$ et donc

$$\begin{aligned}
x^2u_1''(x)+xu_1'(x)-(1+x^2)u_1(x) &= 4xy_1'(x)+\sum_{p=0}^{\infty}(2p+1)^2d_px^{2p+1}-(1+x^2)\sum_{p=0}^{\infty}d_px^{2p+1}\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\tfrac{4(2p+1)}{p!(p+1)!2^{2p+1}}x^{2p+1}+\sum_{p=0}^{\infty}(2p+1)^2-1)d_px^{2p+1}\\
&\qquad -\sum_{p=0}^{\infty}d_px^{2(p+1)+1}\ ,\quad d_0=0\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{p!(p+1)!2^{2p}}}_{=c_{2p}(1)}\tfrac{4(2p+1)1}{2}x^{2p+1}\\
&\qquad +\sum_{p=0}^{\infty}(2p+1)^2-1)d_px^{2p+1}-\sum_{p=1}^{\infty}d_{p-1}x^{2p+1}\\
&= \sum_{p=1}^{\infty}\underbrace{\left(2(2p+1)c_{2p}(1)+((2p+1)^2-1)d_p-d_{p-1}\right)}_{=0}x^{2p+1}+2x\\
&= 2x
\end{aligned}$$

On déduit alors que u$_1$ est bien solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_1) .

(3) .

(a) On pose $u_1(x)=\dfrac{e_0}{x}+\sum_{p=1}^{\infty}e_px^{p-1}$ avec $R=Rcv(\sum_{p\geqslant 1}e_px^{p-1})>0$.

Sur $]0,R[$, on a : $x^2u_1''(x)+xu_1'(x)-(1+x^2)u_1(x)-2x = x^2\left(\dfrac{2e_0}{x^3}+\sum_{p=1}^{\infty}(p-1)(p-2)e_px^{p-2}\right)+x\left(\dfrac{-e_0}{x^2}+\sum_{p=1}^{\infty}(p-1)e_px^{p-2}\right)-2x=\sum_{p=0}^{\infty}(p(p-1)e_p-e_{p-2})x^{p-1}-(e_0+2)x-e_1=0.$ comme dans la question ...., on déduit : $\begin{cases} e_0=-2\\ e_1=0\\ \forall p\geqslant 3,\ p(p-2)e_p-e_{p-1}=0\end{cases}$, ce qui permet de conclure par une récurrence que : $\forall p\in N$, $e_{2p+1}=0$ et $e_{2p}=\dfrac{e_0}{2^{2p}p!(p+1)!=-2c_{2p}(1)}$ car $e_0=-2$ et par suite R est infini et que u_1 est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_1).

(b) (F_1) est une équation différentielle linéaire sans second membre associée à (E_1) et comme z_1 et u_1 sont solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_1), il en résulte que z_1-u_1 est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1) .

(4) Comme dans la question....., en étudiant le comportement des solutions z_1 et y_1 au voisinage de 0^+, on déduit que $(y_1,\, z_1)$ est système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1), donc toute solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1) est de la forme : $y:x\mapsto \alpha y_1(x)+\beta z_1(x)$ où α et β sont des constantes réelles arbitraires .